ETUDE CINEMATIQUE DE MOUVEMENTS TYPES

La *cinématique* est l'étude des mouvements indépendamment de leurs causes. Cette étude a pour but d'associer à chaque type de mouvement des équations destinées à l'identifier.

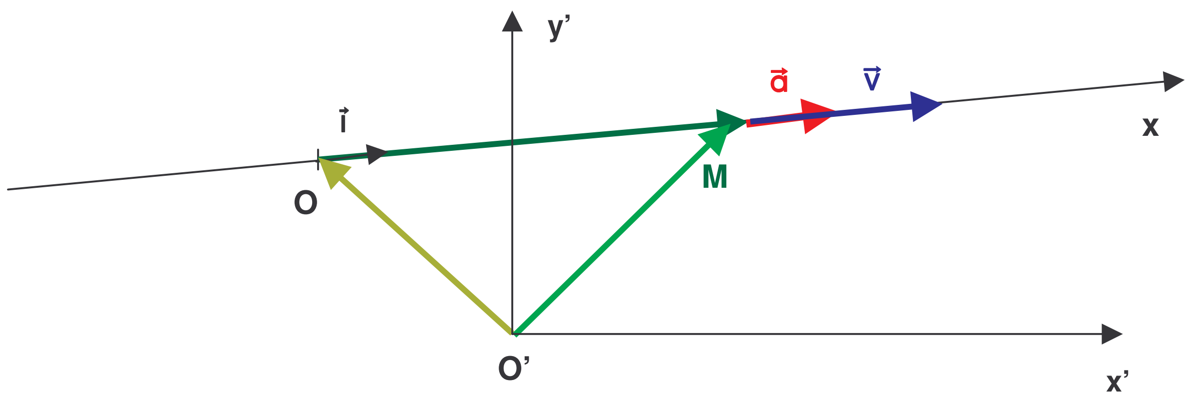
1 Mouvements rectilignes

La trajectoire est une droite. Dans un plan muni d'un repère orthonormé Oxy, son équation est donc du type : y = ax + b. La position du mobile est définie par les équations horaires x(t) et y(t). Le vecteur position est alors : $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$.

On choisit, chaque fois que c'est possible, la trajectoire comme axe des x. Dans ce cas, la position M du mobile est définie par le vecteur position : $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i}$.

En conséquence, la vitesse vaut : $\vec{v} = d\overrightarrow{OM}/dt = v.\vec{i}$, et l'accélération est : $\vec{a} = d\vec{v}/dt = d^2\overrightarrow{OM}/dt^2 = a.\vec{i}$. Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$ sont colinéaires. Il en est toujours ainsi pour un mouvement rectiligne.

Remarque : si on choisit une autre origine O', fixe par rapport à la précédente, la vitesse vaut : $\vec{v} = d\overrightarrow{O'M}/dt = d\overrightarrow{O'O}/dt + d\overrightarrow{OM}/dt = d\overrightarrow{OM}/dt = v.\vec{i}$, puisque $d\overrightarrow{O'O}/dt = 0$, $\overrightarrow{O'O}$ étant un vecteur constant.



Conclusion : pour un référentiel donné, le changement d'origine ne modifie pas le vecteur vitesse.

1.1 Mouvement rectiligne uniforme

La trajectoire est une droite et la vitesse a une valeur constante v. Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire, donc porté par la droite : dans ce cas le vecteur vitesse est constant. En conséquence, l'accélération est nulle : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$.

L'équation horaire s'écrit, sur un axe ayant la direction de la droite : $x = v\,t + x_0$, où x_0 est la position à la date origine.

Exercice résolu

Enoncé : **Une voiture roulant sur une autoroute rectiligne à la vitesse constante de 108 km.h^{-1} franchit à la date t = 8 s un point pris comme origine des espaces. Etablir l'équation du mouvement de son centre d'inertie.**

Solution

1. **Le mouvement se fait à la vitesse $v = v_0$ = cste. Puisque la vitesse est constante, l'accélération est nulle : a = 0.**
2. **Exprimons la valeur de la vitesse en m.s^{-1}.**

1km = 10^3 m, 1 h = 3600 s. $\quad v = \frac{108\ 000}{3\ 600} = 30\ \text{m.s}^{-1}$

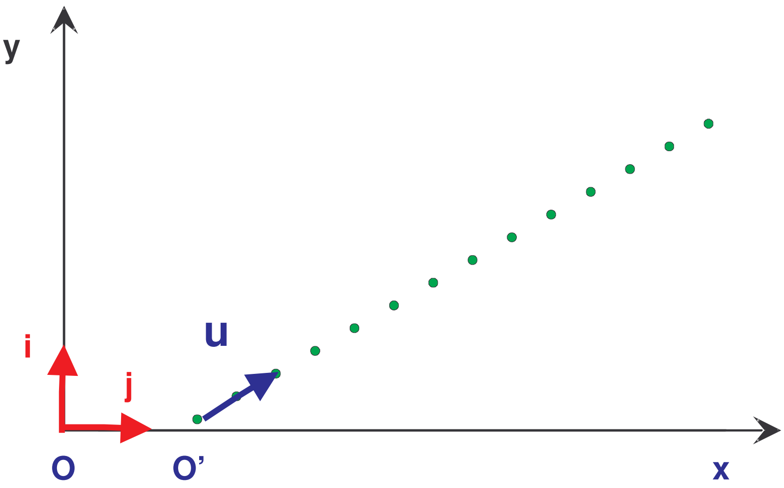
3. **Le mouvement est rectiligne : un seul axe suffit pour le repérer. Choisissons pour axe une droite ayant la direction de la route et le sens du mouvement. D'après l'énoncé, l'origine sur cet axe est la position de la voiture à t = 8s : pour t = 8 s, x = 0.**
4. **Comme v = dx/dt, on obtient par intégration :** $\quad x = v\,t + x_0 = 30\,t + x_0$

pour t = 8 s , x = 0 = (30 . 8) + x_0 d'où : $\quad x_0 = -240$ m

l'équation horaire s'écrit donc : $\quad x = 30\,t - 240$ **(x en m, t en s)**

Enregistrement d'un mouvement rectiligne uniforme :

si la position est enregistrée à des intervalles de temps réguliers,



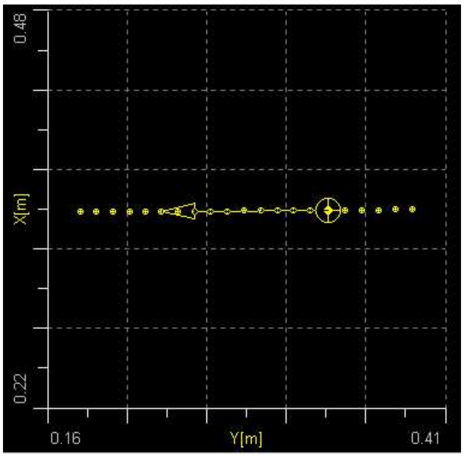
$\overrightarrow{O'M} = r.\vec{u}$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

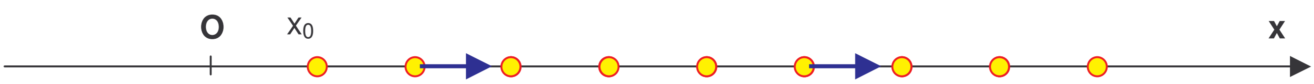
$= x.\vec{i} + y.\vec{j}$

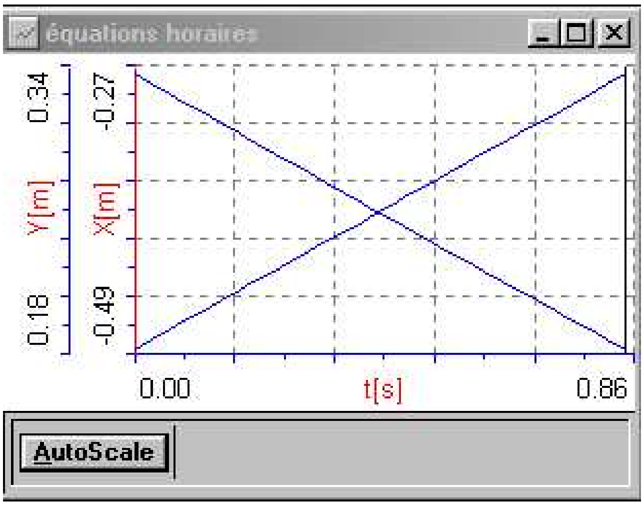
$\vec{u}$, $\vec{i}$, $\vec{j}$: vecteurs unitaires

- La trajectoire est une droite sur laquelle les positions successives sont régulièrement espacées

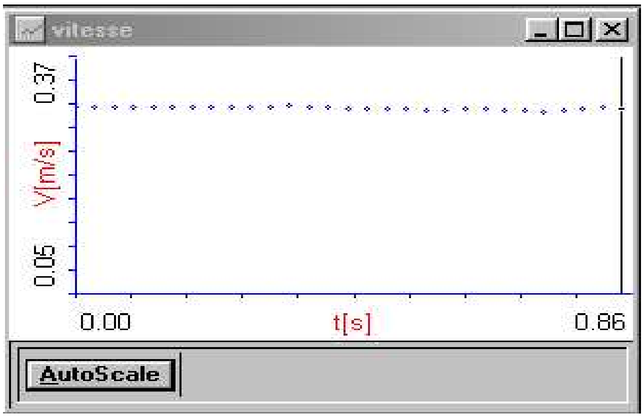


- le vecteur vitesse est porté par cette droite et il est constant.





- Si la trajectoire n'a pas été choisie comme axe, les équations horaires x(t) et y(t) sont toutes deux des fonctions affines du temps



- La vitesse ne varie pas dans le temps

Exercice résolu

Enoncé : **Une voiture roulant sur une autoroute rectiligne à la vitesse constante de 108 $km.h^{-1}$ franchit à la date t = 8 s un point pris comme origine des espaces. Etablir l'équation du mouvement de son centre d'inertie.**

Solution

5. **Le mouvement se fait à la vitesse $v = v_0$ = cste. Puisque la vitesse est constante, l'accélération est nulle : a = 0.**

6. **Exprimons la valeur de la vitesse en $m.s^{-1}$.**

1km = 10^3 m, 1 h = 3600 s. $v = \dfrac{108\ 000}{3\ 600} = 30\ m.s^{-1}$

7. **Le mouvement est rectiligne : un seul axe suffit pour le repérer. Choisissons pour axe une droite ayant la direction de la route et le sens du mouvement. D'après l'énoncé, l'origine sur cet axe est la position de la voiture à t = 8s : pour t = 8 s, x = 0.**

8. **Comme v = dx/dt, on obtient par intégration :** $x = v\,t + x_0 = 30\,t + x_0$

pour t = 8 s , x = 0 = (30 . 8) + x_0 d'où : $x_0 = -\,240$ **m**

l'équation horaire s'écrit donc : $x = 30\,t - 240$ **(x en m, t en s)**

1.2 Mouvement rectiligne uniformément varié

Par définition, il possède une *accélération constante* non nulle : $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \overrightarrow{cste}$. Donc : $\vec{v} = \vec{a}.t + \vec{v}_0$, où $\vec{v}_0$ est la vitesse du mobile à la date $t = 0$. Comme le mouvement est rectiligne, les vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ sont tous deux portés par la trajectoire.

Sur un axe ayant la direction de la trajectoire, en valeur algébrique : $\dfrac{dx}{dt} = v = a\,t + v_0$,

et $x = \dfrac{1}{2} a\,t^2 + v_0\,t + x_0$, où x_0 est la position du mobile sur l'axe à $t = 0$. Avec la même origine, le vecteur position s'écrit : $\overrightarrow{OM} = x(t).\vec{i} = (1/2.a.t^2 + v_0.t + x_0).\vec{i}$.

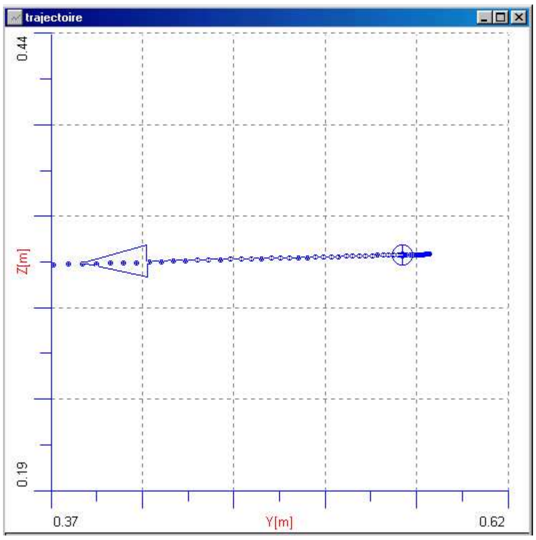
Remarque : un tel mouvement pourra le cas échéant comporter deux phases :

- une phase retardée où $\vec{v}$ et $\vec{a}$ sont de sens contraire.
- une phase accélérée où $\vec{v}$ et $\vec{a}$ sont de même sens.

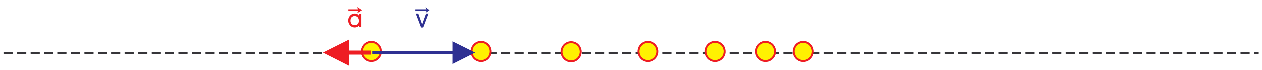
Enregistrement d'un mouvement rectiligne uniformément varié :

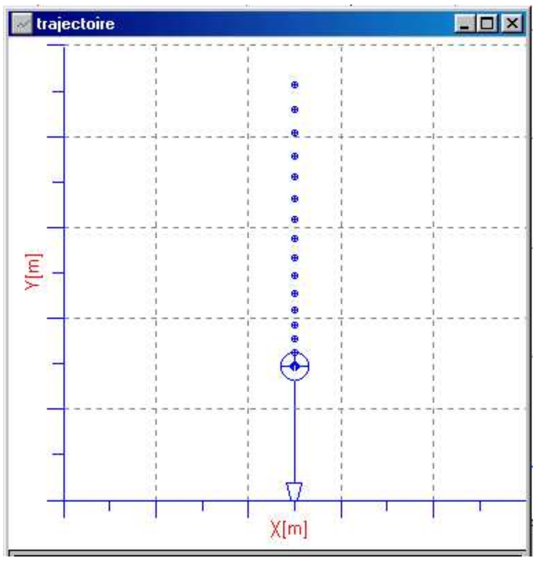
si la position est enregistrée à des intervalles de temps réguliers,

- Les positions successives sont alignées et de plus en plus espacées si le mouvement est accéléré :

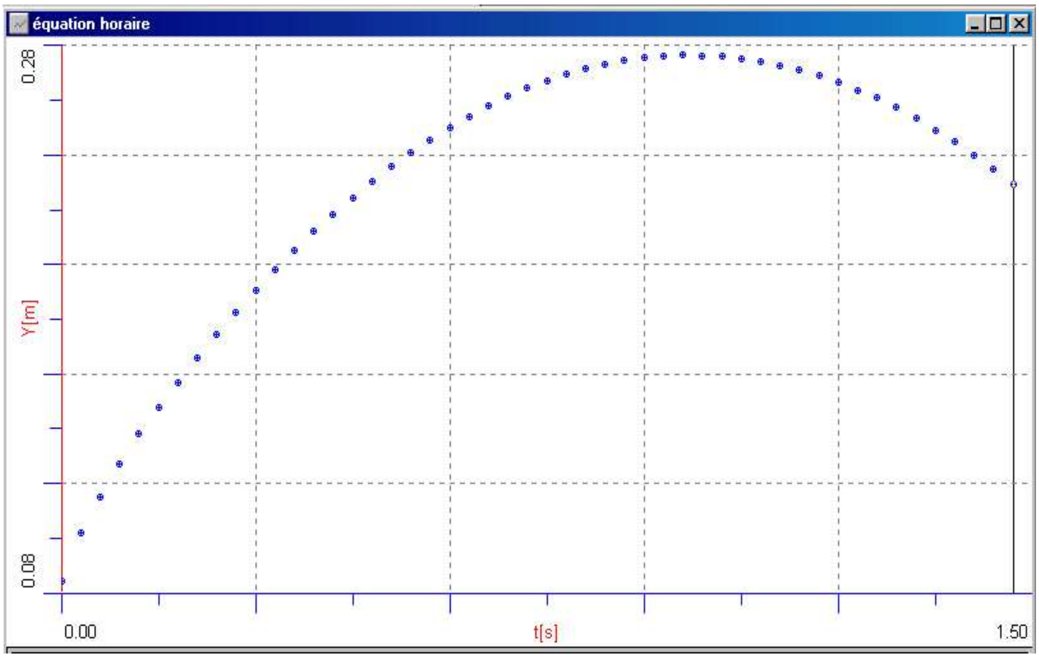


- Les positions successives sont alignées et de plus en plus proches si le mouvement est retardé :

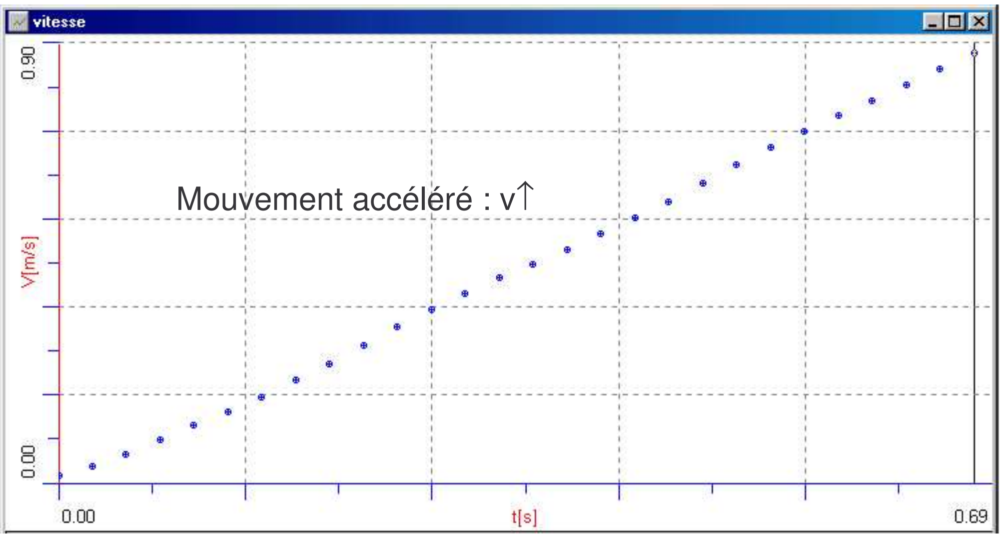




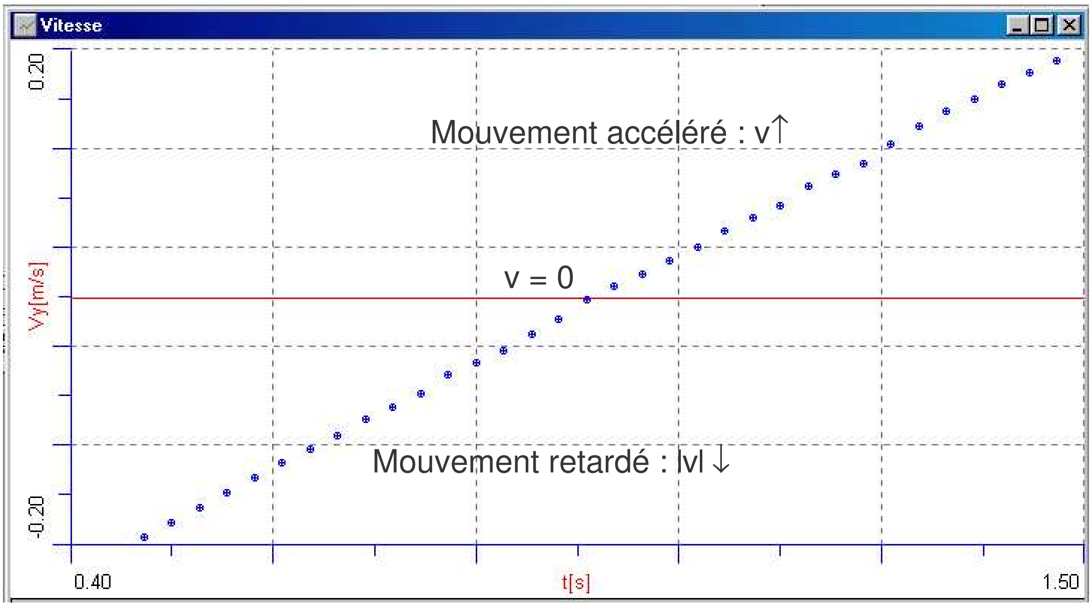
- Si la trajectoire a été choisie comme axe, l'équation horaire est un polynôme du second degré en t



- La valeur de la vitesse est une fonction affine du temps,



- qui passe par la valeur zéro en changeant de signe si le mouvement est d'abord retardé, puis accéléré



Exercice résolu

Enoncé : **Une bille d'acier est lancée verticalement vers le haut avec une vitesse initiale de valeur $v_0 = 2$ m.s^{-1}. Sous l'effet de son poids, elle subit une accélération constante de 10 m.s^{-2} verticale, orientée vers le bas. On prend comme origine des dates (t = 0 s) la date de lancement de la bille et comme origine des espaces le point O du lancement. On choisit pour axe des x la verticale orientée positivement vers le haut. Déterminer l'équation horaire du mouvement, la date et la vitesse de la bille à son retour en O.**

Solution :

1. **Nature du mouvement : puisque que la vitesse initiale et l'accélération sont toutes deux verticales, le mouvement est rectiligne et vertical. Puisque l'accélération est constante, il s'agit d'un mouvement rectiligne uniformément varié.**

2. **Equation horaire : sur un axe vertical orienté vers le haut, avec l'origine indiquée dans l'énoncé : $x = (1/2)at^2 + v_0t + x_0$, avec $a = -10$ m.s^{-2} , $v_0 = +2$ m.s^{-1}, $x_0 = 0$ m ;**

   d'où : $x = -5t^2 + 2t$.

3. **Date du passage en O : au point O, $x = 0$, donc : $- 5 t^2 + 2 t = t (- 5 t + 2) = 0$. Cette équation admet deux solutions : $t = 0$ (instant de départ) et $t = 2/5 = 0,4$ s (valeur cherchée).**

4. **L'expression : $v = a t + v_0 = - 10 t + 2$ conduit, pour la date $t = 0,4$ s, à la solution : $v = -2 m.s^{-1}$.**

   A son retour en O, la bille a une vitesse négative, donc $\vec{v}$ et $\vec{a}$ sont de même sens : le mouvement est dans sa phase accélérée.

2 Mouvements curvilignes

La trajectoire est courbe, donc $\vec{v}$ et $\vec{a}$ ne sont plus obligatoirement colinéaires.

2.1 Mouvement parabolique

C'est par exemple le cas du mouvement d'un projectile lancé à la surface de la terre avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ non verticale. L'observation montre que le mouvement se fait avec une accélération $\vec{a}$ de valeur constante, verticale, et dirigée vers le bas.

La trajectoire est plane. On choisit le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans le plan de la trajectoire, plan défini par les vecteurs vitesse initiale $\vec{v}_0$ et accélération $\vec{a}$.

Comme par définition l'accélération est : $\vec{a} = d\vec{v}/dt$, et qu'à la date origine t=0 la vitesse est $\vec{v}_0$, le vecteur vitesse aura pour équation : $\vec{v}(t) = \vec{a}.t + \vec{v}_0$.

Comme par définition $\vec{v} = d\overrightarrow{OM}/dt$, si à la date origine t=0 la position du mobile est M_0, le vecteur position aura pour équation : $\overrightarrow{OM} = ½\,\vec{a}.t^2 + \vec{v}_0.t + \overrightarrow{OM}_0$.

En projetant cette équation sur les axes choisis, on obtiendra les équations horaires du mouvement :

$x(t) = v_{0x}.t + x_0$, où v_{0x} est la projection de $\vec{v}_0$ sur l'axe des x, et x_0 l'abscisse du mobile à t = 0.

$y(t) = ½.a.t^2 + v_{0y}.t + y_0$, où v_{0y} est la projection de $\vec{v}_0$ sur l'axe des y, et y_0 l'ordonnée du mobile à t = 0.

De x(t), on peut tirer :

$$t = [x(t) - x_0]/\ v_{0x}$$

Qui, reporté dans y(t) donne :

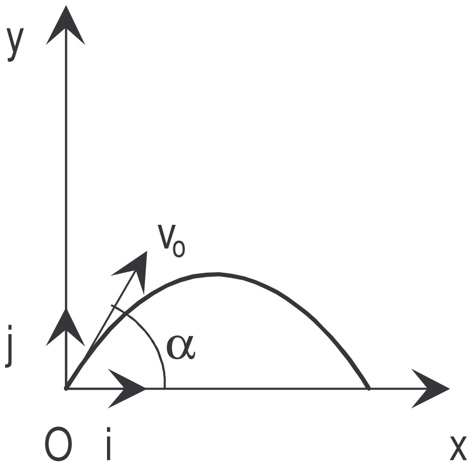
$$y(x) = ½.a.\{\ [x(t) - x_0]/\ v_{0x}\ \}^2 + v_{0y}.\ [x(t) - x_0] + y_0$$
$$= \alpha.x^2(t) + \beta.x(t) + \gamma$$

qui est bien l'équation d'une parabole.

Exercice résolu

Enoncé : **On lance un mobile, vers le haut, avec une vitesse initiale $v_0 = 20\ m.s^{-1}$. L'angle de tir est $\alpha = 60°$. On admet que l'accélération est verticale, dirigée vers le bas, et de valeur constante : $a = 10\ m.s^{-2}$. Etablir l'équation de la trajectoire du mobile et les coordonnées du point d'impact sur le sol.**

Solution :



A partir des composantes de $\vec{a}$ et des conditions initiales, on déduit successivement les composantes de $\vec{v}$, les équations horaires x (t) et y (t), puis l'équation de la trajectoire :

$\vec{a} = 0.\vec{i} - 10.\vec{j}$ $\quad\quad$ $\vec{v} = cste_x.\vec{i} + (-10t + cste_y).\vec{j}$

En prenant t = 0 au lancement en O, on déduit les valeurs des constantes de l'expression de $\vec{v}$: à t = 0, $\vec{v} = \vec{v}_0 = v_0.\cos 60.\ \vec{i} + v_0.\sin 60.\ \vec{j}$, d'où : $cste_x = v_0.\cos 60 = 10\ m.s^{-1}$, et $cste_y = v_0.\sin 60 = 10\sqrt{3}\ m.s^{-1}$.

En intégrant les composantes de $\vec{v}$, il vient : $x = 10t + x_0$ et $y = -5t^2 + 10\sqrt{3}.t + y_0$, et comme l'origine O a été choisie au point de lancement, $x_0 = y_0 = 0$.

En remplaçant t par sa valeur (x/10) dans l'expression de y on obtient l'équation de la trajectoire :

$y(x) = -5(x/10)^2 + 10\sqrt{3}\,(x/10)\ ;\ y = -x^2/20 + x\sqrt{3}$ $\quad\quad$ **(1)**

Au point d'impact, y = 0 ; la résolution de l'équation (1) donne deux solutions :

$x = 0$ (point O) $\quad\quad$ et : $\quad\quad$ $x = 20\sqrt{3} = 34{,}6m$ (point A)

2.2 Mouvement circulaire uniforme

2.2.1 Définition

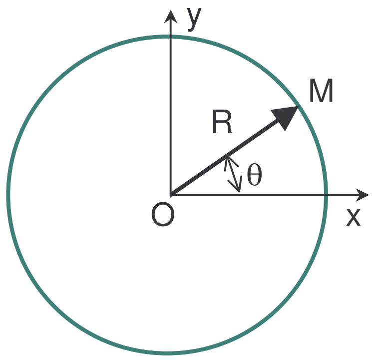
La trajectoire est un cercle de rayon R et la *valeur* de la vitesse est *constante*.

2.2.2 Equations de la trajectoire

Rappelons qu'un cercle de rayon R est l'ensemble des points du plan situé à une distance R du centre O de ce cercle : $\|\overrightarrow{OM}\| = R$.

En coordonnées orthonormées, si l'origine du repère coïncide avec le centre du cercle, pour un point M tel que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ fasse avec l'axe Ox un angle θ :

$$\overrightarrow{OM} = x_M.\vec{i} + y_M.\vec{j}$$



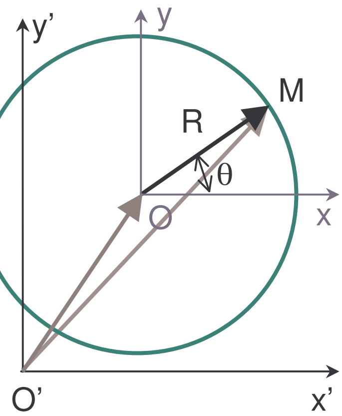
$$x_M = R.\cos\theta$$

$$y_M = R.\sin\theta$$

$$x^2_M + y^2_M = R^2$$

Si l'origine O' du repère ne coïncide pas avec le centre du cercle, pour un point M tel que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ fasse avec l'axe O'x un angle θ :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'M} - \overrightarrow{O'O} = (x_M - x_{O'}).\vec{i} + (y_M - y_{O'}).\vec{j}$$



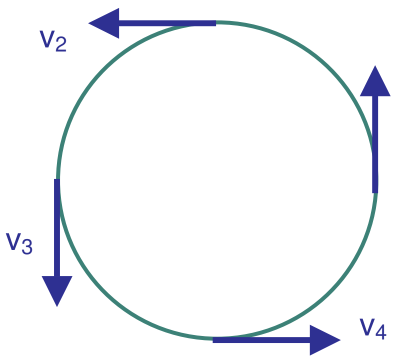
$$x_M - x_{O'} = R.\cos\theta$$

$$y_M - y_{O'} = R.\sin\theta$$

$$(x_M - x_{O'})^2 + (y_M - y_{O'})^2 = R^2$$

2.2.3 Existence d'une accélération

La *valeur* de la vitesse est *constante*. Cependant le *vecteur* vitesse *change* constamment de direction. C'est pourquoi il existe une accélération : $\vec{v} \neq \overrightarrow{\text{vecteur constant}} \Rightarrow \vec{a} = d\vec{v}/dt \neq 0$.

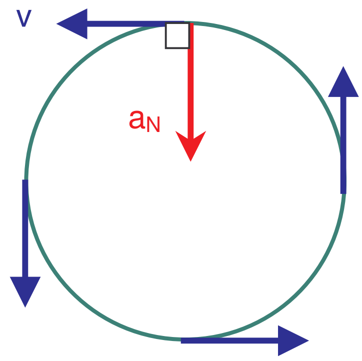


$v_1 = v_2 = v_3 = v_4$

$v = \|\vec{v}\| = \text{constante}$

$\vec{v} \neq \overrightarrow{\text{vecteur constant}}$

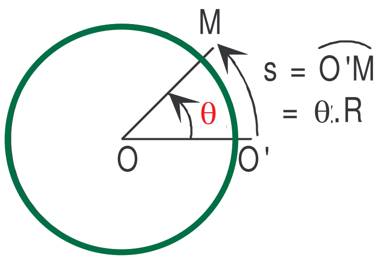
$\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2 \neq \vec{v}_3 \neq \vec{v}_4$



Dans la direction de la vitesse, donc sur la tangente à la trajectoire, on peut définir une accélération tangentielle $a_T = \dfrac{dv}{dt}$, et, comme pour un mouvement uniforme v = cste, elle vaut $a_T = \dfrac{dv}{dt} = 0$; dans un mouvement circulaire uniforme, puisqu'il y a une accélération, elle est donc normale à la trajectoire, c'est à dire dirigée vers le centre du cercle. C'est pourquoi on l'appelle accélération *centripète*. Sa valeur est : $a = a_N = \dfrac{v^2}{R}$.

Dans un mouvement circulaire uniforme , il existe une accélération. Bien que la *valeur* de la vitesse soit *constante*, la *direction* du vecteur vitesse *varie* au cours du mouvement. L'*accélération* est *centripète,* c'est à dire dirigée vers le centre du cercle.

2.2.4 Equations horaires



Remarque : Un mouvement circulaire peut aussi être caractérisé par ses grandeurs angulaires :

l'élongation angulaire θ (en radians), qui est l'angle (algébrique) fait par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ avec le vecteur position à l'origine $\overrightarrow{OO'}$, et la vitesse angulaire $\omega = d\theta/dt$ (en rad.s^{-1}).

L'abscisse curviligne $s = \overset{\frown}{O'M}$ (longueur de l'arc O'M) et la vitesse linéaire v, qui dépendent du rayon R de la trajectoire, sont reliées à ces grandeurs par les expressions :

$s = \theta.R$; $\omega = d\theta/dt$; $v = ds/dt = R.d\theta/dt = \omega.R$

Selon que l'on s'intéresse à un mouvement autour du centre ou sur le cercle, on aura :

	autour du centre	sur le cercle
déplacement	θ (rad)	$s = R.\ \theta$ (m)
vitesse	ω (rad.s^{-1})	$v = R.\omega$ (m.s^{-1})

Pour un mouvement circulaire uniforme, la vitesse linéaire v étant constante, la vitesse angulaire ω le sera aussi. La position du mobile à la date t pourra être repérée par $\theta(t)$, dont l'équation est, puisque $\omega = d\theta/dt$:

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0$$

où θ_0 est l'angle fait par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, à la date origine, avec l'axe des x.

En coordonnées orthonormées, si l'origine du repère est au centre du cercle, les équations horaires sont données par les projections du vecteur position sur les deux axes :

$$x(t) = R.\cos\theta(t) = R.\cos(\omega t + \theta_0)$$

$$y(t) = R.\sin\theta(t) = R.\sin(\omega t + \theta_0)$$

on retrouve bien la définition de la trajectoire : $x^2 + y^2 = R^2$.

Exercice résolu

Enoncé

Une roue de vélo tourne à raison de 8 tours par seconde. On considère la valve comme un point mobile M décrivant un cercle de rayon R = 30 cm.

1°) Calculer la vitesse angulaire ω du point M

2°) En déduire sa vitesse linéaire v et son accélération a.

Solution

1°) Comme un tour vaut 2 π radians, la vitesse angulaire est $\omega = 8 \,.\, 2\pi = 16\pi \approx 50$ rad.s^{-1}

2°) Le mouvement se fait sur un cercle de rayon R avec une vitesse angulaire ω constante. Sur la trajectoire, la vitesse linéaire est donc constante et vaut : $v = \omega R = 50 \,.\, 0{,}3 = 15$ m.s^{-1}

La valeur de la vitesse est constante, l'accélération tangentielle est donc nulle ; la seule composante de l'accélération est donc centripète et vaut :

$$a = a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{15^2}{0{,}3} = 750 \text{ m.s}^{-2}$$