1 HYDROSTATIQUE

Dans ce chapitre, nous considérerons les fluides (liquides ou gaz) au repos dans un référentiel galiléen en nous intéressant à quelques unes de leurs caractéristiques (masse volumique, pression, volume, température).

1.1 Caractéristiques des fluides

Les fluides sont des substances susceptibles de s'écouler et de prendre la forme du récipient qui les contient; on dit qu'ils sont sans forme propre.

On peut répartir les fluides en deux grandes catégories:

- les liquides
- les gaz

Les liquides sont pratiquement incompressibles. Ils produisent des surfaces libres, occupent des volumes bien définis quand ils sont en contact avec l'atmosphère.

Les gaz sont compressibles et ils se dilatent jusqu'à occuper toutes parties du récipient qui les contient.

1.1.1 Particule de fluide – Milieu continu

• En mécanique des fluides, on ne considère pas le comportement individuel des atomes, molécules qui composent le fluide.

• On étudie le mouvement, les propriétés d'une particule de fluide : élément de volume petit devant la taille des récipients, tuyaux, barrages… que nous allons étudier, mais grand devant les distances entre les molécules et contenant un grand nombre de molécules.

→ approximation du milieu continu

→ échelle mésoscopique : échelle intermédiaire entre le macroscopique et le microscopique (cf. § 4.1)

exemple :

Un cube de 1 μm^3 contient ≈ 3 10^7 molécules de gaz dans les conditions normales de température et de pression (CNTP), c.a.d. P = 1 atm = 101325 Pa et T = 273 K.

Les distances entre molécules sont ≈ 3 nm

⇒ l'approximation du milieu continu est valable.

1.1.2 Grandeurs caractéristiques

- **masse volumique**

La masse volumique d'un fluide est définie (comme pour tout corps) comme le rapport entre sa masse et son volume. C'est une grandeur intensive qui ne dépend pas de la quantité de matière.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Ordres de grandeur (CNTP):

- Pour les liquides : $\rho \approx 10^3$ kg m^{-3}
  - mercure : $\rho = 13\,600$ kg m^{-3}
  - essence : $\rho \approx 750$ kg m^{-3}
  - glycérine : $\rho \approx 1260$ kg m^{-3}
  - eau : $\rho \approx 1000$ kg m^{-3}

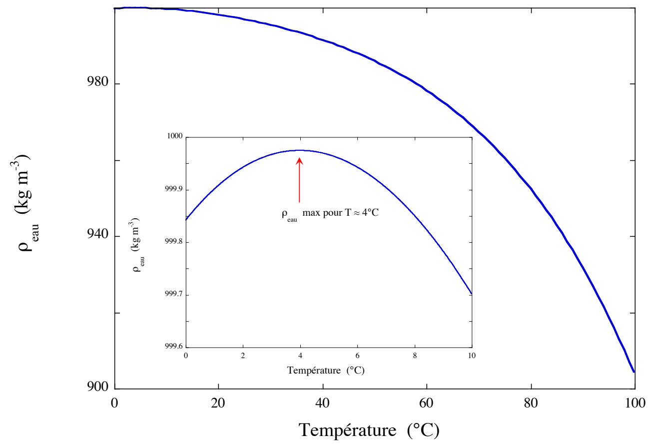
On définit la densité d'un corps comme étant le rapport :

$$d = \frac{\rho_{corps}}{\rho_{eau}} \qquad \text{(sans dimension)}$$

La masse volumique d'un corps dépend :

- de la température : si on le chauffe, en général, un corps se dilate et occupe plus de volume.
- de la pression : si on comprime un corps, en général, il occupe moins de volume.

Exemple : variation de la masse volumique de l'eau en fonction de la température :



- Pour les gaz :

La masse volumique d'un gaz est calculable à partir de son équation d'état.

Pour un gaz considéré comme parfait, on a :

$$P\,V = n\,R\,T$$

- P : pression (Pa)
- V : volume (m^3)
- n : nombre de mol
- R : Constante molaire des gaz parfaits (GP)
  $R = 8.314$ J K^{-1} mol^{-1}
- T : Température (K)

La loi des gaz parfaits peut être écrite en fonction de la masse volumique (ρ) et de la masse molaire du gaz (M) :

$$V = \frac{m}{\rho} \qquad \text{et} \qquad n = \frac{m}{M}$$

d'où : $$P\frac{m}{\rho} = \frac{m}{M} R\, T \quad \Rightarrow \quad \frac{P}{\rho} = \frac{R\,T}{M}$$

ou encore : $$\rho = \frac{P}{r\,T}$$

avec : $r = R/M$ constante **massique** des G.P.

$r = 287$ J K^{-1} kg^{-1}

Ordres de grandeur :

Dans les conditions normales de température et de pression (CNTP), c.a.d. $P = 1$ atm et $T = 273$ K :

- H_2 : 0.0899 kg m^{-3}
- Air sec : 1.293 kg m^{-3}
- CO : 1.250 kg m^{-3}
- H_2S : 2.715 kg m^{-3}

→ pour les gaz : : $\rho \approx 1$ kg m^{-3}

Exercice d'application :

Calcul approché de la masse volumique de l'air

On fait les approximations suivantes :

- l'air est constitué à :
  - 80% de diazote N_2
  - 20% de dioxygène O_2
- l'air se comporte comme un gaz parfait et obéit, à ce titre à la loi des gaz parfaits (cf. § 4.2 Théorie cinétique des gaz).

Par définition, la masse volumique de l'air peut être calculée à partir de :

$$\rho_{\text{air}} = \frac{\text{masse de 1 mol d'air}}{\text{volume de 1 mol d'air}}$$

- la masse de 1 mol d'air (masse molaire) est donnée par :

$$M_{\text{air}} = 0.80 \cdot M_{N_2} + 0.20 \cdot M_{O_2} = 0.0288 \text{ g mol}^{-1}$$

où M_{N_2} et M_{O_2} sont respectivement les masses molaires du diazote (28 g mol^{-1}) et du dioxygène (32 g mol^{-1}).

- le volume de 1 mol d'air (volume molaire) est :

$$V_{\text{air}} = \frac{n\,R\,T}{P} = \frac{1 \cdot 8.314 \cdot 273}{101325} \approx 22.4\ 10^{-3} \text{ m}^3$$

→ d'où finalement : $\rho_{\text{air}} = 1.285$ kg m^{-3}

en assez bon accord avec la valeur de référence…

- **Viscosité**

- La viscosité d'un fluide caractérise sa capacité à s'écouler dans un tube, un canal, un récipient.

- La viscosité d'un fluide est principalement due à l'interaction entre les molécules constituant le fluide.

- Pour un fluide considéré comme parfait, les molécules constituant le fluide glissent les unes sur les autres sans frottement.

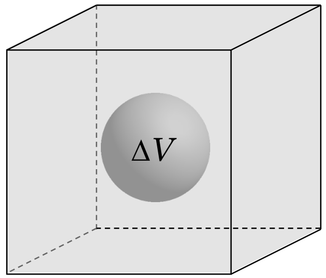
- Pour un fluide réel, la viscosité est prise en compte et se traduit par l'apparition de forces non conservatives (dissipant l'énergie mécanique sous forme de chaleur).

- Suivant la nature de l'écoulement, un fluide pourra être considéré parfait (la viscosité est négligeable) ou réel (la viscosité n'est plus négligeable).

- La viscosité n'intervient pas en hydrostatique

Forces de pression

Considérons un élément de volume de fluide de masse Δm et de masse volumique ρ en équilibre mécanique avec le reste du fluide environnant :

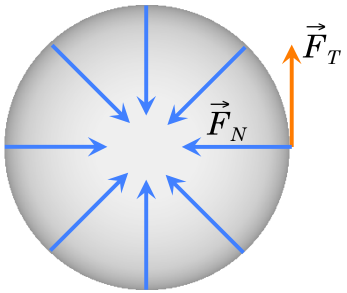


$$\Delta m = \rho\, \Delta V$$

Cet élément de volume est soumis à :

- des forces de volume : dues à l'existence de champs auxquels peut être soumis ΔV et qui s'appliquent à tous les atomes contenus dans ΔV :
  - de gravité (pesanteur),
  - accélération.

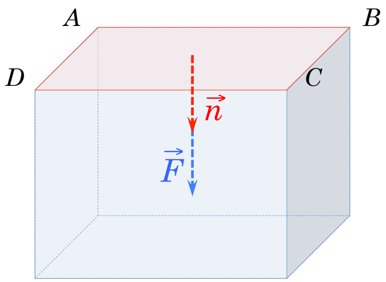
- des forces de surface : qui se décomposent en :
  - forces tangentielles $\vec{F}_T$ liées à la viscosité du fluide $\rightarrow$ *ne concernent que les fluides en mouvement*
  - forces normales (⊥) $\vec{F}_N$ à la surface en tout point de celle-ci et dirigées vers l'intérieur de l'élément de volume : **forces de pression hydrostatique**



Dans ce chapitre, nous nous limiterons à l'étude des **forces de pression hydrostatique**.

Il est important de bien distinguer les forces de pression, qui sont des grandeurs vectorielles (d'où la notation $\vec{F}$), de la pression qui est une grandeur scalaire et ne dépend pas, par définition, de la direction (autres grandeurs scalaires : température, nombre de moles, énergie, volume, …).

Considérons une surface plane (quadrilatère $ABCD$ de surface S) sur laquelle la pression P est uniforme :



On définit la force de pression hydrostatique par :

$$\vec{F} = P\,S\,\vec{n} \qquad \vec{n} : \text{vecteur unitaire} \perp \text{à } S$$

Dans ce cas, la pression est définie par :

$$P = \frac{|\vec{F}|}{S} = \frac{F}{S}$$

Dans le cas d'une surface (plane ou non) pour laquelle la pression n'est plus uniforme, on va considérer un petit élément de surface ΔS.

ΔS est suffisamment petit pour que :

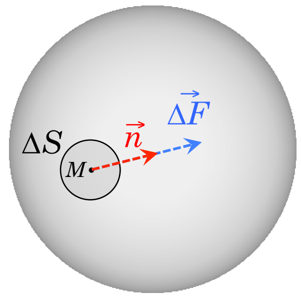
(i) que la pression y soit supposée uniforme

(ii) que ΔS soit considérée comme plane.

Alors, la force élémentaire $\vec{\Delta F}$ exercée sur ΔS est :

$$\vec{\Delta F} = P(M)\,\Delta S\,\vec{n}$$

avec $\vec{n}$: vecteur unitaire perpendiculaire à ΔS



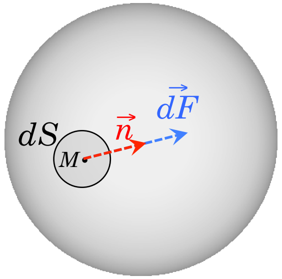
La pression hydrostatique en un point M de la surface d'un élément de volume est définie comme le rapport

$$P = \lim_{\Delta F, \Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S}$$

La force de pression infinitésimale $\vec{dF}$ est définie par :

$$\mathrm{d}\vec{F} = P(M)\,\mathrm{d}S\,\vec{n} = P(M)\,\mathrm{d}\vec{S}$$

avec $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\,\vec{n}$



Dimension, Unités, ordres de grandeur :

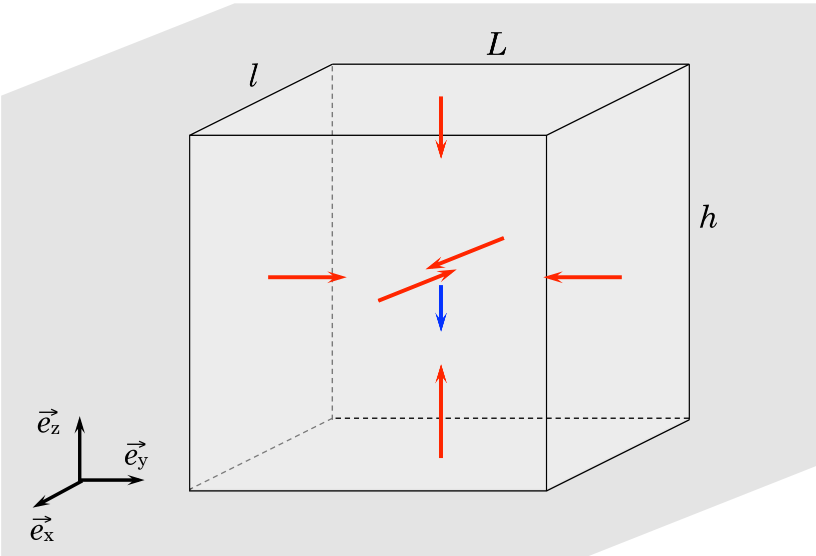
- dimension : $[P] = M\,L^{-1}\,T^{-2}$
- unité S.I. : le pascal (Pa)
  1 Pa = 1 N m^{-2}
- unités dérivées
  - le bar : 1 bar = 10^5 Pa
  - le mbar : 1 mbar = 100 Pa = 1 hPa
  - l'atmosphère : 1 atm = 101325 Pa = 1.013 bar
  - le Torr / mmHg : 133.32 Pa
- ordres de grandeur :
  - vide intersidéral : 10^{-15} Pa (1–10 molécules cm^{-3})
  - tube du LHC : 10^{-9} Pa
  - sol lunaire : 10^{-8} Pa
  - dans une ampoule électrique classique : 1 Pa
  - sol martien : 10^4 Pa
  - sol terrestre : 10^5 Pa
  - bouteille de gaz (labo) : 10^7 Pa (100 bar)

- fosse des Mariannes : 10^8 Pa (1 000 bar)
- centre de la Terre : 350 GPa (3.5 Mbar)
- cellules à enclumes de diamant → 500 GPa
- centre de Jupiter : 5 TPa (50 Mbar)
- centre du Soleil : 10^{16} Pa

1.2 Relation fondamentale de l'hydrostatique

1.2.1 Cas d'un fluide homogène incompressible

On considère un liquide homogène et incompressible dont la masse volumique ρ est constante. On s'intéresse plus particulièrement à un élément de volume V parallélépipédique ($l \times L \times h$) :



Cet élément de volume est au repos, il est immobile dans le repère $(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$. En vertu de la première loi de Newton, ceci se traduit par le fait que la somme des forces exercées sur cet élément de volume est nulle.

$$\sum \vec{F}^{\,i}_{ext} = \vec{0}$$

Quelles sont les forces exercées sur ce volume :

- Forces de pression :
  - selon $\vec{e}_x$: $\vec{F}(x)$ et $\vec{F}(x+l)$
  - selon $\vec{e}_y$: $\vec{F}(y)$ et $\vec{F}(y+L)$
  - selon $\vec{e}_z$: $\vec{F}(z)$ et $\vec{F}(z+h)$
- Forces de volume :
  - poids : $\vec{P}_{poids} = m\ \vec{g} = \rho\ V\ \vec{g}$

La condition d'équilibre s'écrit :

$$\underbrace{\vec{F}(x) + \vec{F}(x+l)}_{\vec{e}_x} + \underbrace{\vec{F}(y) + \vec{F}(y+L)}_{\vec{e}_y} + \underbrace{\vec{F}(z) + \vec{F}(z+h)}_{\vec{e}_z} + \underbrace{\vec{P}_{poids}}_{\vec{e}_z} = \vec{0}$$

Il apparaît donc que :

- les forces de pression horizontales selon $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ se compensent deux à deux :

$$\vec{F}(x) + \vec{F}(x+l) = \vec{0}$$

$$\vec{F}(y) + \vec{F}(y+L) = \vec{0}$$

- la sommes des forces de pression verticales selon $\vec{e}_z$ sont opposées au poids du volume considéré.

$$\vec{F}(z) + \vec{F}(z+h) + \vec{P}_{poids} = \vec{0}$$

Avec :

- $\vec{F}(z) = P(z)\ l\ L\ \vec{e}_z$ (vers le haut)
- $\vec{F}(z+h) = -\,P(z+h)\ l\ L\ \vec{e}_z$ (vers le bas)
- $\vec{P}_{poids} = \rho\ V\ \vec{g} = -\,\rho \cdot l\ L\ h \cdot g\ \vec{e}_z$ (vers le bas)

Soit :

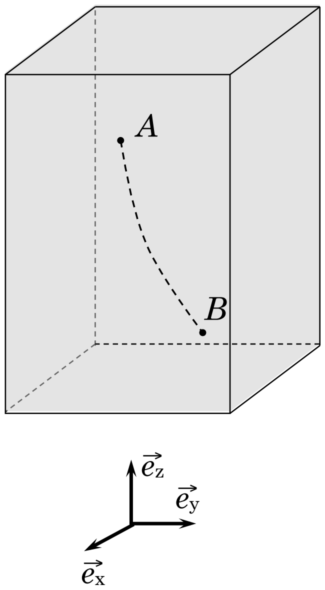
$$P(z) - P(z+h) - \rho\ g\ h = 0$$

Ou encore :

$$\boxed{P(z) = P(z+h) + \rho\ g\ h \qquad \text{avec } h > 0}$$

Équation fondamentale de l'hydrostatique

On peut reformuler cette expression en fonction de la cote des points considérés :



$$P(z_B) = P(z_A) + \rho\ g\ (z_A - z_B)$$

$$\Leftrightarrow \quad P(z_B) - P(z_A) = -\,\rho\ g\ (z_B - z_A)$$

$$\Leftrightarrow \quad \Delta P = -\,\rho\ g\ \Delta z$$

Cette relation montre que la variation de pression dans un fluide incompressible est proportionnelle à :

- la densité du fluide
- la différence de hauteur

On peut écrire que la quantité $P + \rho g z$ est constante :

$$P(z_A) + \rho g z_A = P(z_B) + \rho g z_B = C^{te}$$

Conséquences :

- les surfaces isobares sont horizontales

$$P = C^{te} \quad \Leftrightarrow \quad z = C^{te}$$

- la surface libre d'un liquide au repos est horizontale

$$P = P_{atm} \quad \Leftrightarrow \quad z = C^{te}$$

- Principe de Pascal : une variation de pression appliquée à un fluide confiné dans une enceinte fermée est transmise intégralement à travers tout le fluide.

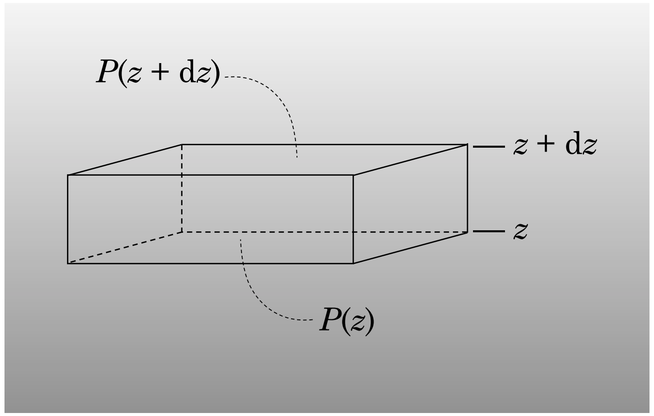
$$P(z_A) + \Delta P + \rho g z_A = C^{te} = P(z_B) + \Delta P + \rho g z_B$$

1.2.2 Cas d'un fluide compressible

Pour les fluides compressibles comme le sont les gaz, la masse volumique dépend de la pression. Dans le cas d'un volume de gaz dans un champ de pesanteur (exemple : atmosphère terrestre), on comprend aisément que les couches de gaz situées à basse altitude sont comprimées par le poids des couches supérieures.

Les raisonnements utilisés précédemment pour les liquides ne sont plus valables car la pression et la masse volumique des fluides compressibles (gaz) peuvent varier de manière significative avec la hauteur z à laquelle on se place.

Il convient alors de raisonner sur une petite différence de hauteur dz pour laquelle on peut légitimement supposer que la variation de masse volumique est très faible voire négligeable. Le fluide peut alors être considéré comme homogène sur l'épaisseur concernée.



Dans ce cas, la relation fondamentale de l'hydrostatique peut s'écrire :

$$P(z) = P(z + \mathrm{d}z) + \rho(z)\, g\, \mathrm{d}z$$

ou encore :

$$\frac{P(z + dz) - P(z)}{\mathrm{d}z} = -\, \rho(z)\, g$$

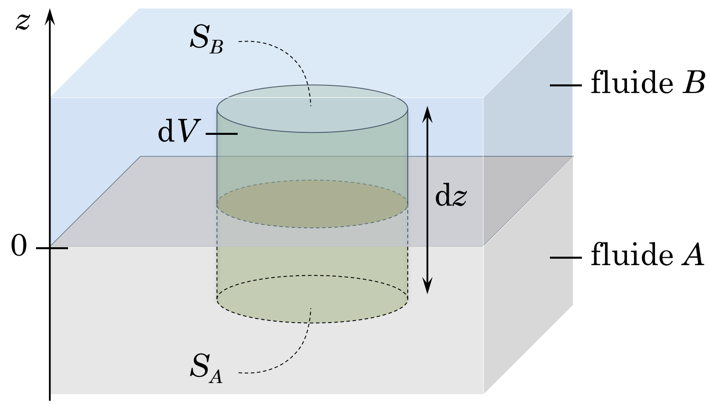
en faisant tendre l'épaisseur du volume considéré d$z \to 0$, on arrive à l'équation différentielle suivante :

$$\lim_{dz \to 0} \frac{P(z + dz) - P(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\, \rho(z)\, g$$

La relation fondamentale de l'hydrostatique reste valable mais la masse volumique ρ n'est plus une constante.

1.2.3 Cas d'une interface entre deux fluides

Considérons deux couches de fluides A et B (gaz ou liquide) séparées par une interface plane.
On cherche à déterminer la pression régnant à l'interface entre les deux fluides (en $z = 0$, voir dessin ci-après).
Pour ce faire, on considère un élément de volume dV de hauteur dz dont les faces supérieure (S_B) et inférieure (S_A) sont respectivement dans le fluide B et le fluide A.



L'élément de volume contient un mélange de fluides A et B pour une masse totale dm.

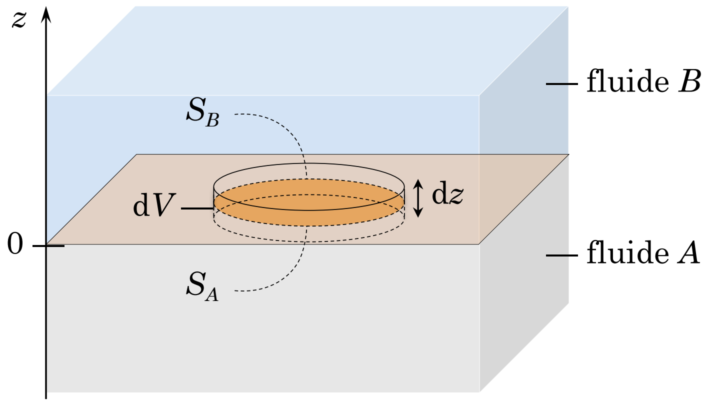
En tenant un raisonnement analogue à celui utilisé dans le paragraphe **1.2.1**, on établit le bilan des forces exercées sur cet élément de fluide au repos :

$$\vec{F}_{SA} + \vec{F}_{SB} + \vec{P} = \vec{0}$$

Les forces exercées sur la paroi latérale (cylindrique) s'annulent par symétrie.

$$P(z_A)\, S\, \vec{e}_z - P(z_B)\, S\, \vec{e}_z - \mathrm{d}m\, g\, \vec{e}_z = \vec{0}$$

En faisant tendre $\mathrm{d}z \to 0$, la quantité $\mathrm{d}m \to 0$ aussi.



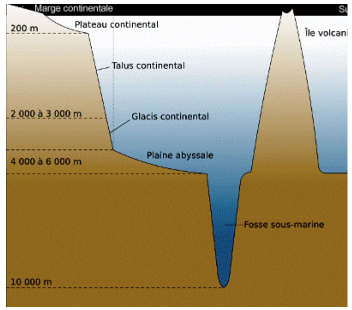
On constate alors que :

$$P(z_A = 0^-) - P(z_B = 0^+) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad P(0^-) = P(0^+)$$

La pression est donc continue à la traversée d'une interface entre deux fluides.

1.2.4 Applications

- Pression au fond de la fosse des Mariannes (-10196 m)



$P_0 = P_{atm} = 101325$ Pa

$z_0 = 0$ (niveau de référence)

$z = -10196$ m

Le fluide à considérer est l'eau salée dont la masse volumique sera supposée constante $\rho_{eau} = 1030$ kg m^{-3}

On utilise l'équation fondamentale de l'hydrostatique :

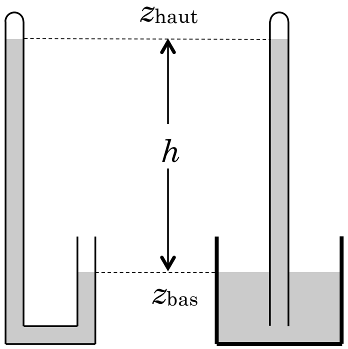
$$P_{fosse} = P_0 + \rho_{eau}\, g\, (z_0 - z)$$

$$P_{fosse} = 101325 + 1030 \cdot 9.81 \cdot 10196 \;= 103.12\ 10^6 \text{ Pa}$$

$$\approx 1018 \text{ atm}$$

photographie du bathyscaphe "*Trieste*" de Jacques et Auguste Piccard, descendu au fond de la fosse des Mariannes en 1960

- **Baromètre** : inventé par E. Torricelli (1608-1647)



Les deux dispositifs représentés ci-contre sont équivalents : ils sont remplis par un liquide de masse volumique ρ.

La relation fondamentale de l'hydrostatique appliquée à ce système est :

$$P(z_{\text{haut}}) + \rho\, g\, z_{\text{haut}} = P(z_{\text{bas}}) + \rho\, g\, z_{\text{bas}}$$

À quoi correspondent les pressions $P(z_{\text{haut}})$ et $P(z_{\text{bas}})$?

- $P(z_{\text{haut}})$ est mesurée dans le tube, au sommet de la colonne de liquide.
  $P(z_{\text{haut}}) = 0$; c'est le vide (en toute rigueur; ce n'est pas vrai car le liquide s'évapore un peu).
- $P(z_{\text{bas}})$ est mesurée dans la colonne de liquide mais aussi à la surface de celui-ci ($P + \rho g z = C^{te}$).
  $P(z_{\text{bas}}) = P_{\text{atm}}$; la surface libre du liquide est à la pression atmosphérique.

$$\Delta P = P(z_{\text{bas}}) - P(z_{\text{haut}}) = P_{\text{atm}} = \rho\, g\, (z_{\text{haut}} - z_{\text{bas}}) = \rho\, g\, h$$

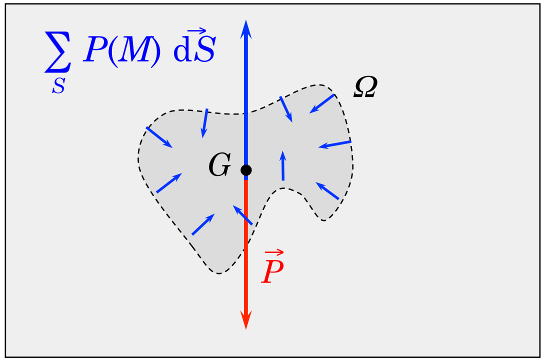
→ La hauteur de la colonne de liquide est proportionnelle à la pression atmosphérique.

Le baromètre (comme son nom l'indique) permet de mesurer la pression atmosphérique.

- On utilise généralement du mercure ($\rho = 13570$ kg m^{-3}); P_{atm} équivaut à une hauteur de liquide égale à 760 mm.
  D'où l'unité Torr = mmHg = 133.32 Pa
- Si on voulait construire un baromètre en utilisant de l'eau; il faudrait une hauteur de 10.33 m.

1.3 Poussée d'Archimède (287 – 212 av JC)

On considère un certain volume de fluide Ω au sein d'une masse de fluide (gaz ou liquide).



Le volume de fluide considéré, Ω, est en équilibre. Il est soumis :

- à son propre poids $\vec{P}$,
- aux forces de pression s'exerçant sur sa surface et dont la résultante est :

  $$\sum_S P(M)\,\mathrm{d}\vec{S}$$

La situation d'équilibre est :

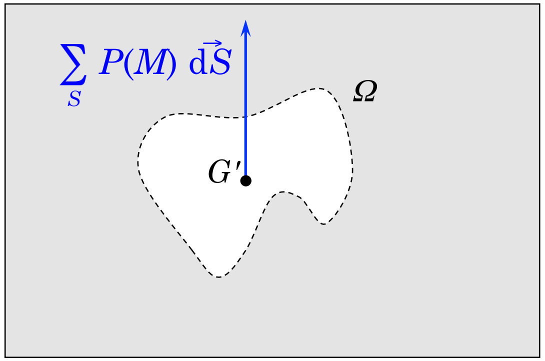
$$\vec{P} + \sum_S P(M)\,\mathrm{d}\vec{S} = \vec{0}$$

D'où :

$$\sum_S P(M)\,\mathrm{d}\vec{S} = -\vec{P}$$

La somme des forces de pression exercées sur la surface de Ω est exactement compensée par le poids du fluide contenu dans Ω.

Remplaçons le volume de fluide par un corps différent (solide, liquide ou gazeux) ayant le même contour :



La surface définissant le volume étant identique, les forces de pression sont les mêmes que précédemment : en intensité et point d'application.

THÉORÈME D'ARCHIMÈDE

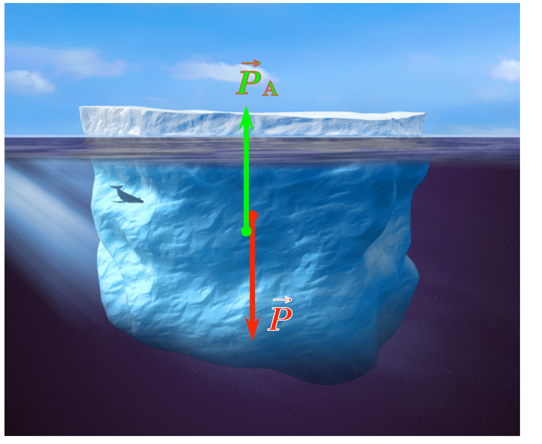
Les forces de pression sur un volume quelconque immergé dans un(des) fluide(s) en équilibre mécanique peuvent être modélisées par une résultante, la poussée d'Archimède, égale à l'opposée du poids qu'aurait ce même volume occupé par des fluides en équilibre, et s'appliquant au centre de gravité G' de ce volume de fluide.

Équilibre des corps flottants / immergés :

- si la densité du corps immergé est supérieure à celle du fluide, le corps tombe car son poids est supérieur à la poussée exercée par le fluide.
- si la densité du corps immergé est égale à celle du fluide, le corps est en équilibre.
- si la densité du corps immergé est inférieure à celle du fluide, le corps flotte (ou remonte) car son poids est inférieur à la poussée exercée par le fluide.

• Applications :

Flottaison d'un iceberg



L'iceberg est soumis à :

- son poids : $\vec{P} = m\ \vec{g} = -\rho_{\text{glace}} V_{\text{iceberg}}\ g\ \vec{e}_z$
- la poussée d'Archimède exercée par l'eau salée

$$\vec{P}_A = +\rho_{\text{mer}} V_{\text{immergé}}\ g\ \vec{e}_z$$

On remarquera que les points d'application ne sont pas confondus dans le cas des corps flottants :

- le point d'application du poids est situé au centre de gravité de l'iceberg
- le point d'application de la poussée d'Archimède est situé au centre de gravité de la partie immergée de l'iceberg.

→ possibilité de renversement (Vasa – 1628)

Dans les conditions d'équilibre :

$$\vec{P} + \vec{P}_A = \vec{0}$$

$$-\rho_{glace} V_{iceberg}\, g\, \vec{e_z} + \rho_{mer} V_{immergé}\, g\, \vec{e_z} = \vec{0}$$

$$-\rho_{glace} V_{iceberg} + \rho_{mer} V_{immergé} = 0$$

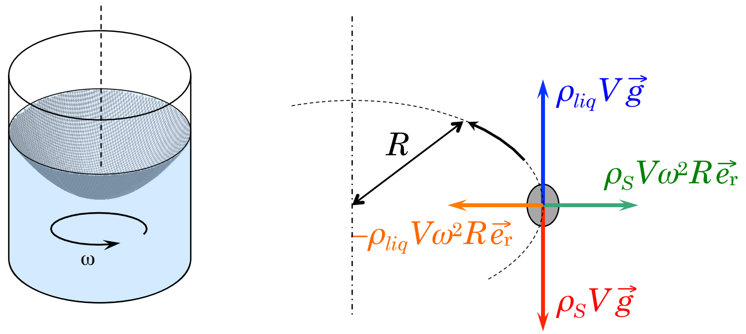
$$\Rightarrow \quad V_{immergé} = V_{iceberg} \cdot \frac{\rho_{glace}}{\rho_{mer}}$$

Avec $\rho_{glace} = 910$ kg m^{-3} et $\rho_{mer} = 1035$ kg m^{-3}, il apparaît qu'environ 90% du volume d'un iceberg est immergé.

Centrifugation / Ultracentrifugation

(hors programme)

Une particule de masse volumique ρ_S et de volume V est placée dans un fluide de masse volumique ρ_{liq} en rotation (à la vitesse angulaire ω).



Cette particule est soumise à :

- son propre poids $\rho_S V \vec{g}$
- une force d'inertie centrifuge : $\rho_S V \omega^2 R \vec{e_r}$
- à la poussée d'Archimède qu'elle subirait si le fluide n'était pas en rotation : $\rho_{liq} V \vec{g}$
- à la force que subirait le même volume de liquide soumis à la force d'inertie centrifuge et en équilibre mécanique : $-\rho_{liq} V \omega^2 R \vec{e_r}$

Cette dernière force est l'équivalent de la poussée d'Archimède dans le cas d'une accélération qui n'est pas due au champ de pesanteur.

Deux cas de figures :

- si ρ_S est supérieure à ρ_{liq} alors la somme des forces est dirigée vers le bas et vers l'extérieur
- si ρ_S est inférieure à ρ_{liq} alors la somme des forces est dirigée vers le haut et vers l'intérieur

Il est donc possible de séparer par centrifugation des particules ayant des tailles et des masses volumiques différentes.

Par ultracentrifugation, il est également possible de séparer par des molécules et isotopes de masses volumiques différentes.